

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

PRIMO QUESITO

(30 puncti)

- 5p** 1. Demonstrate che $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 1$.
- 5p** 2. Si considerano le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$. Determinate il numero reale a per il quale $f(a) = g(a)$.
- 5p** 3. Risolvete nell'insieme dei numeri reali l'equazione $2^{2x+1} \cdot 2^3 = 1$.
- 5p** 4. Determinate quanti numeri naturali, di due cifre diverse fra loro, possono essere formati con le cifre dell'insieme $A = \{3, 4, 5, 6\}$.
- 5p** 5. Nel riferimento cartesiano xOy si considerano i punti $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 3)$ ed M il punto medio del segmento AB . Dimostrate che i segmenti MO ed MC hanno lunghezze uguali.
- 5p** 6. Si considera $E(x) = 2 \sin x \sin 2x - \cos x$, con x numero reale. Dimostrate che $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

SECONDO QUESITO

(30 puncti)

1. Si considerano le matrici $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ed $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix}$, con a numero reale.
- 5p** a) Dimostrate che $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Dimostrate che $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = aI_2$, per qualunque numero reale a .
- 5p** c) Dimostrate che $\det(A(a^2) - aA(a)) \geq 0$, per qualunque numero reale a .
2. Nell'insieme dei numeri reali è definita la legge di composizione $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$.
- 5p** a) Dimostrate che $0 \circ 2 = 12$.
- 5p** b) Determinate i numeri reali x per i quali $(2x) \circ x = -1$.
- 5p** c) Determinate le coppie (m, n) di numeri interi, con $m < n$, per le quali $m \circ n = 3$.

TERZO QUESITO

(30 puncti)

1. Si considera la funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \frac{4x-4}{x^2}$.
- 5p** a) Dimostrate che $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinate l'equazione dell'assintoto orizzontale verso $+\infty$ al grafico della funzione f .
- 5p** c) Dimostrate che $|f(x) - f(y)| \leq 1$, per qualsiasi $x, y \in [1, +\infty)$.
2. Si considera la funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4 \ln x$.
- 5p** a) Dimostrate che $\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = 7$.
- 5p** b) Dimostrate che $\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = e^2 + 1$.

5p c) Dimostrate che $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)dx = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, per qualunque primitiva $F:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ della funzione f .