Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

THEMA I (30 Punkte)

5p **1.** Zeige, dass $4-6\sqrt{3}+3\left(2\sqrt{3}-1\right)=1$.

5p **2.** Gegeben sind die Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-3$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+3$. Bestimme die reelle Zahl a so, dass $f(a)=g(a)$.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $2^{2x+1}\cdot 2^3=1$.

5p **4.** Bestimme wie viele natürliche zweistellige Zahlen mit verschiedenen Ziffern kann man mit den Ziffern aus der Menge $A=\{3,4,5,6\}$ bilden.

5p **5.** Gegeben sind die Punkte $A(4,0)$, $B(0,2)$, $C(3,3)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy und M die Mitte der Strecke AB. Zeige, dass die Strecken MO und MC gleiche Längen haben.

5p **6.** Gegeben ist $E(x)=2\sin x\sin 2x-\cos x$,wobei x eine reelle Zahl ist. Zeige, dass $E\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

THEMA II (30 Punkte)

1. Gegeben sind die Matrizen $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ und $A(a)=\begin{pmatrix}3+a & 2-2a\\ 1-a & 1+3a\end{pmatrix}$, wobei a eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det\left(A(0)\right)=1$.

5p **b)** Zeige, dass $A(0)\cdot\left(A(a)-A(0)\right)=aI_2$, für jede reelle Zahl a.

5p **c)** Beweise, dass $\det\left(A\left(a^2\right)-aA(a)\right)\ge 0$, für jede reelle Zahl a.

2. Auf der Menge der reellen Zahlen definiert man die Verknüpfung $x\circ y=x^2-4xy+3y^2$.

5p **a)** Zeige, dass $0\circ 2=12$.

5p **b)** Bestimme die reellen Zahlen x so, dass $(2x)\circ x=-1$.

5p **c)** Bestimme die Paare (m,n) von ganzen Zahlen, mit $m<n$, so, dass $m\circ n=3$.

THEMA III (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5+\frac{4x-4}{x^2}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\frac{4(2-x)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der horizontalen Asymptote gegen $+\infty$ an das Schaubild der Funktion f.

5p **c)** Beweise, dass $\left|f(x)-f(y)\right|\le 1$, für alle $x,y\in[1,+\infty)$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+4\ln x$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_1^2\left(f(x)-4\ln x\right)dx=7$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_1^e x\left(f(x)-3x^2\right)dx=e^2+1$.

5p **c)** Beweise, dass $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)dx=\frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, für jede Stammfunktion $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ der Funktion f.