

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 bodeva)

- 56 1. Smatra se комплексni broj $z = 3 + i$. Докажите да $z(z - 2i) = 10$.
- 56 2. Smatra se функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$. Докажите да $f(2x) - 2f(x) = -1$, за било који реални број x .
- 56 3. Решите у скупу реалних бројева једначину $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 2} = x$.
- 56 4. Smatra se skup A , skup двоцифрених природних бројева. Израчунајте вероватноћу да, бирајући један број n из скупа A , број $n + 5$ да буде мултиплу (садржилац) од 10.
- 56 5. У картезијанском систему xOy сматрају се тачке $A(4, 0)$ и $B(5, 4)$. Одредите једначину праве d која садржи тачку O и је паралелна са правом AB .
- 56 6. Smatra se једнакокраки троугао ABC , правоугли у A , са површином од 4. Докажите да $BC = 4$.

SUBIECTUL II

(30 бодова)

1. Smatra se матрица $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{pmatrix}$ и систем једначина $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - y + az = 4 \\ ax + (a+1)y - 2z = a \end{cases}$, где a јесте реални број.
- 56 а) Докажите да $\det(A(0)) = 8$.
- 56 б) Одредите скуп реалних бројева a тако да матрица $A(a)$ прихвати инверзну матрицу.
- 56 в) За $a = -2$, докажите да $x_0 z_0 + y_0 = -2$, за било које решење (x_0, y_0, z_0) система једначина.
2. На скупу реалних бројева дефинише се закон слагања $x \circ y = xy + (2^x - 2)(2^y - 2)$.
- 56 а) Докажите да $2 \circ 3 = 18$.
- 56 б) Докажите да $e = 1$ јесте неутрални елемент закона слагања „ \circ ”.
- 56 в) Докажите да $x \circ (-x) \leq 1$, за било који реални број x .

SUBIECTUL III

(30 бодова)

1. Smatra se функција $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1}$.
- 56 а) Докажите да $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x-1)(x+3)}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 56 б) Одредите једначину косе асимптоте према $+\infty$ на графику функције f .
- 56 в) Докажите да $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, за било који $x \in (1, +\infty)$.
2. Smatra se функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.
- 56 а) Докажите да $\int_0^3 f(x) e^x dx = 18$.

- 56 b) Докажите да $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \frac{e-2}{e}$.
- 56 c) Докажите да $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$.