Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

СУБЈЕКАТ I **(30 бодова)**

5б **1.** Докажите да $8-6\sqrt{6}+6\left(\sqrt{6}-1\right)=2$.

5б **2.** Сматра се функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+m$, где m реални број. Одредите реални број m тако да $(f\circ f)(0)=4$.

5б **3.** Решите на скупу реалних бројева једначину $3\cdot 2^{2x}+4^{x}=4$.

5б **4.** Израчунајте вероватноћу да, бирајући један број из скупа двоцифрених природних бројева, овај да има цифру десетица дељиву са бројем 6.

5б **5.** У картезијанском систему xOy сматра се права d са једначином $y=3x-2$ и тачка $A(a,a)$, где a јесте реалан број. Одредите реалан број a, знајући да тачка A припада правој d.

5б **6.** Сматра се једнакокраки троугао ABC, са $AB=10$ и $\cos A=0$. Докажите да површина троугла ABC једнака је са 50.

СУБЈЕКАТ II **(30 бодова)**

1. Сматра се матрица $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, где x јесте реалан број.

5б **a)** Докажите да $\det\left(A(1)\right)=1$.

5б **b)** Докажите да $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, за било које реалне бројеве x и y.

5б **c)** Одредите природни број n тако да $A(n)\cdot A(n+1)\cdot A(n+2)\cdot A(n+3)=A\left(2n^2\right)$.

2. На скупу $M=[0,+\infty)$ дефинише се закон слагања $x*y=\dfrac{2x}{y+2}+\dfrac{2y}{x+2}$.

5б **a)** Докажите да $1*0=1$.

5б **b)** Докажите да $e=0$ јесте неутралан елеменат за закон слагања „$*$”.

5б **c)** Одредите $x\in M$, x ненултни, тако да $x*\dfrac{4}{x}=x$.

СУБЈЕКАТ III **(30 бодова)**

1. Сматра се функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2+\dfrac{x}{e^x-x}$.

5б **a)** Докажите да $f'(x)=\dfrac{e^x(1-x)}{\left(e^x-x\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5б **b)** Одредите интервале монотоније функције f.

5б **c)** Докажите да, за било који $m\in(1,2]$, једначина $f(x)=m$ има јединствену солуцију.

2. Сматра се функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x+\sqrt{x^2+9}$.

5б **a)** Докажите да $\int_1^5\left(f(x)-\sqrt{x^2+9}\right)dx=0$.

5б **b)** Докажите да $\int_0^4\frac{x}{f(x)+x-3}dx=2$.

5б **c)** За сваки ненултни природни број n сматра се број $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$. Докажите да $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.